Mouvement d'un point

1- Trajectoire d'un point (en deux dimensions)

Plaçons-nous dans un plan avec un repère orthonormé *Oxy*, et donnons-nous deux fonctions du temps t : $x(t)$ et $y(t)$. Lorsque le temps t augmente, le point M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ décrit une courbe. On dit que $x(t)$ et $y(t)$ sont les équations paramétriques de la courbe (le paramètre étant la variable temps t). Cette courbe est aussi appelée la trajectoire de M.

Voici quelques exemples :

1) Prenons comme coordonnées de M : $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, avec x_0, y_0, a et b donnés. En appelant A le point (x_0, y_0), et $\boldsymbol{V}$ le vecteur (a , b), vecteur $\boldsymbol{AM}$ a pour coordonnées $x - x_0$ et $y - y_0$ et l'on en déduit la relation vectorielle $\boldsymbol{AM} = t\boldsymbol{V}$, ce qui exprime que M est sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\boldsymbol{V}$. Et quand t va de $-\infty$ à $+\infty$, il la décrit entièrement.

2) $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Le point M décrit le cercle de centre O et de rayon R. Plus précisément il tourne indéfiniment sur ce cercle.

3) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Le point M décrit indéfiniment une ellipse.

2- Vecteur vitesse *V* et nombre vitesse *v*

On sait que la vitesse v (nombre positif ou nul) est la distance d parcourue pendant l'intervalle de temps t, divisée par t :

$$v = d / t$$

Mais il s'agit là d'une vitesse moyenne pendant un certain laps de temps t. Entretemps la vitesse peut subir des variations.

On définit alors la vitesse instantanée v à l'instant t comme étant :

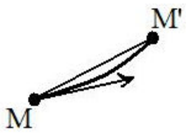
$$v = ds / dt$$

où dt est un intervalle de temps très court (et même qui tend vers 0), et ds la distance parcourue entre le temps t et le temps $t + dt$, autrement dit ds désigne la longueur de l'arc de la trajectoire décrit pendant l'intervalle de temps dt. Plus précisément, cette vitesse, comme limite de la longueur d'arc parcourue divisée par le temps écoulé, lorsque celui-ci tendant vers 0, est la dérivée de s comme fonction de t. Mais pour le traitement sur ordinateur, nous devrons considérer dt comme un temps très court, ce qui donnera une valeur approchée de v, et plus le temps dt sera court, plus on sera proche de la valeur théorique v.

Maintenant donnons-nous la trajectoire du point M par ses équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$, en supposant que ces deux fonctions admettent des dérivées (premières, secondes,…). Par définition le vecteur vitesse à l'instant t est :

$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ où x' et y' sont les dérivées de x et de y par rapport au temps.

Ce vecteur $\boldsymbol{V}$ a comme propriété d'être tangent à la trajectoire, et sa longueur n'est autre que le nombre v.



En effet prenons le point M ($x(t)$, $y(t)$) sur la courbe à l'instant t, et un point voisin M' à l'instant $t + dt$. Le vecteur $\boldsymbol{MM'}$ a pour coordonnées ($x(t+dt) - x(t)$, $y(t+dt) - y(t)$), et le vecteur $\boldsymbol{MM'} / dt$ ($(x(t+dt) - x(t)) / dt$, $(y(t+dt) - y(t)) / dt$). Faisons tendre dt vers 0. Le vecteur $\boldsymbol{MM'} / dt$ tend vers le vecteur $\boldsymbol{V}$ ($x'(t)$, $y'(t)$), et d'autre part la sécante (MM') tend à devenir la tangente en M, ce qui fait que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est tangent à la trajectoire. Sa longueur est la limite du nombre MM' / dt, soit v.

3- Accélération

Par définition le vecteur accélération $\boldsymbol{A}$ à l'instant t est le vecteur $\boldsymbol{dV} / dt$, c'est-à-dire la dérivée du vecteur $\boldsymbol{V}$, soit ($x''(t)$, $y''(t)$), ou pour les besoins informatiques, la variation $\boldsymbol{dV}$ du vecteur vitesse pendant un temps très court dt, divisée par dt.

Pourquoi l'accélération joue-t-elle un rôle fondamental dans les mouvements de points pesants? Parce qu'elle obéit à la loi fondamentale de la dynamique :

$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{A}$

Ainsi si l'on connaît la force agissant sur le point de masse m, on connaît l'accélération, et même, avec une masse $m = 1$, elle est égale à la force.

4- Mouvements rectilignes simples

1) Mouvement uniforme

Plaçons une bille de masse m sur le sol horizontal en un point O et imprimons lui une vitesse initiale $\boldsymbol{V}$ (d'amplitude v) à l'instant $t = 0$. Que va-t-il se passer ? Comme la force agissante est le poids $\boldsymbol{P}$ vertical, elle n'exerce aucune influence sur le mouvement horizontal, et sur le plan du sol, avec un repère Oxy où Ox porte le vecteur $\boldsymbol{V}$ initial avec le même sens que lui, l'accélération est nulle, soit $x'' = 0$ et $y'' = 0$ à chaque instant t. On en déduit que $x'(t)$ et $y'(t)$ restent constants, et en tenant compte des conditions initiales, $x'(t) = v$, et $y'(t) = 0$. En intégrant, on a $x(t) = vt + K$, et $y(t) = K'$. En tenant compte des conditions initiales, les constantes sont nulles, il reste $x(t) = vt$, et $y(t) = 0$. On obtient un mouvement uniforme, à vitesse constante, sur l'axe des x.

Cela peut être retrouvé très concrètement. Avec le repère défini précédemment, la particule qui part du point O au temps 0, va se trouver au point d'abscisse $v\,dt$ lorsque dt s'est écoulé, et elle garde sa vitesse v puisque l'accélération est nulle. Puis on recommence à partir de ce point, et cela indéfiniment, ce qui prouve que le point avance sur l'axe des x à vitesse constante v.

Le programme correspondant s'écrit :

```
dt= 0.0001 ; x=0.; vx=v.;  (v est donné, et on se donne dt très petit */
for( ;;)  { x+=vx*dt ; dessiner le point xe = xo+zoom*x, ye=yo sur l'écran }
```

2) Mouvement uniformément accéléré

Prenons l'exemple de la chute libre. On laisse tomber un objet M de poids mg à partir d'un point O (la vitesse initiale étant nulle). Prenons un axe vertical Oy dirigé vers le bas. Le point M va se déplacer sur cet axe. Au temps t = 0, il est en O, avec une vitesse nulle et une accélération égale à g (ce que l'on appelle justement l'accélération de la pesanteur. Au bout de dt, le point ne bouge pas puisque la vitesse est nulle, et la vitesse varie de $dv = g\ dt$, elle prend alors la valeur $g\ dt$. Au cours du dt suivant, la vitesse augmente encore de $g\ dt$, prenant la valeur $2\ g\ dt$, et le point bouge de $(g\ dt)\ dt$. En répétant cela, on constate que la vitesse augmente régulièrement, et que le mouvement du point est de plus en plus grand au cours des intervalles de temps dt successifs.[1] On dit que le mouvement est uniformément accéléré.

D'où le programme :

```
dt=0.0001 ; y=0 ; vy=0. ;
for( ;;)
  { ay = g;
    y + = vy*dt ;  /* on prendra plutôt y += vy * dt + 0.5*ay*dt*dt , voir
                      remarque ci-dessous */
    vy += ay * dt ;
   dessiner le point sur l'écran xe=xo+zoom*xo, ye= yo+zoom*y
}
```

Remarques

- On peut aussi lancer le poids vers le haut à partir du point O, avec une vitesse initiale verticale v. En prenant un axe Oy dirigé vers le haut, on a $y'' = -g$, puis par intégration $y' = -gt + v$ (la vitesse diminue régulièrement), en enfin $y = -(1/2)\, g\, t^2 + vt$ (la constante étant nulle puisque $y = 0$ pour $t = 0$). On dit que le mouvement est uniformément décéléré.

- Entre le temps t et $t + dt$, si court dt soit-il, on a considéré que la vitesse restait constante, et égale à sa valeur au temps t. Ce n'est pas tout à fait exact. Pour améliorer la précision, on peut considérer que la vitesse pendant l'intervalle dt est la moyenne entre la vitesse v au temps t et la vitesse $v + dv = v + ay\ \ dt$ au temps $t + dt$, d'où une variation de position
$$dy = (1 / 2)\ v\ dt + (1/ / 2)\ (v + ay\ dt)\ dt = v\ dt + (1 / 2)\ ay\ dt^2.$$

---

[1] En termes d'équations différentielles, cela s'écrit $y'' = g$. Sa résolution donne : $y' = gt$ (la constante étant nulle puisque la vitesse est nulle au départ), puis $y = (1 / 2)\ g\ t^2$ (la constante étant nulle puisque $y = 0$ au temps 0). On dit que le mouvement est uniformément accéléré.

Signalons qu'il s'agit si l'on préfère d'une application de la formule de Taylor qui indique que $f(t + dt) \approx f(t) + f\,'(t)\,dt + (1 / 2)\,f\,''(t)\,dt^2$.

• Dans tout ce qui précède, on a supposé que la seule force est le poids. Nous avons donc considéré comme sans influence les frottements ou la résistance de l'air, qui ralentiraient le mouvement. Nous ferons intervenir ces forces ultérieurement.

5- Mouvement d'un projectile

A partir d'un point *O*, on lance un projectile *M* de masse *m* avec une vitesse initiale ***V***. La seule force agissante est le poids *mg* vertical. Prenons le plan vertical contenant le vecteur ***V*** et plaçons dans ce plan un repère *Oxy* avec Ox horizontal et *Oy* vertical vers le haut. Le vecteur ***V*** a pour coordonnées (*vx0*, *vy0*) et le mouvement du point *M*(*x*, *y*) se fait dans le plan *Oxy*. Pour obtenir la trajectoire, il suffit de projeter le mouvement sur les axes du repère. Sur l'axe des *x* le mouvement est uniforme puisque la force horizontale est nulle, et sur l'axe des *y* le mouvement est uniformément décéléré, sous l'action du poids vertical. Le programme s'en déduit.

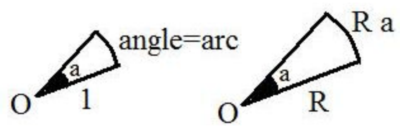
```
x=0., y=0. ; vx=vx0, vy = vy0 ; dt = 0.0001;  /* vx0 et vy0 (>0) donnés */
do
{ ay= -g;   /* on peut prendre ay=-1. */
  x+= vx*dt ; y +=vy*dt + 0.5* ay*dt*dt;
  vy+= ay*dt ;   /* vx reste toujours égal à vx0*/
}
while (y>0)   /* pour rester au-dessus du sol */
```

La trajectoire obtenue est une parabole (voir *cours informatique et mathématiques chapitre 5-fonctions, exercice 2*).

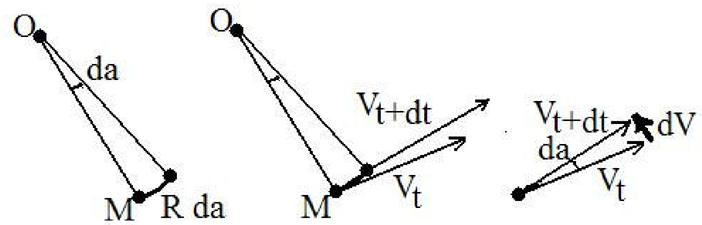
6- Mouvement sur un cercle à vitesse constante

- Prenons une particule qui circule sur un cercle de rayon *R* à vitesse constante *v*. Cela signifie que la particule a un vecteur vitesse *V* tangent au cercle et d'amplitude *v*. A l'instant $t = 0$ la particule est au point *A* tel que $OA = R$, et sa vitesse initiale est perpendiculaire à *OA* et d'amplitude *v*. Plaçons-nous à un temps *t* quelconque. Entre l'instant *t* et l'instant $t + dt$ très légèrement supérieur la particule parcourt un arc de longueur $R\,d\alpha$ [2]et l'on a $R\,d\alpha = v\,dt$. tandis que le vecteur vitesse tourne du même angle $d\alpha$ (voir dessin). La variation du vecteur vitesse donne un vecteur *dV*. Ce vecteur est perpendiculaire au vecteur vitesse, sa longueur est $v\,d\alpha$ et il est dirigé vers le centre *O* du cercle. Par définition le vecteur accélération est $A = dV / dt$ et son amplitude est $a = v\,d\alpha / dt$. D'où

[2] Par définition, un angle *a* dont le sommet est en un point *O* a pour mesure en radians la longueur de l'arc de cercle de centre *O* et de rayon 1. Par suite, dans un cercle de rayon *R* la longueur d'un arc est *R a*, où *a* est l'angle au centre correspondant.



$a = v\,v\,/\,R = v^2\,/\,R.$

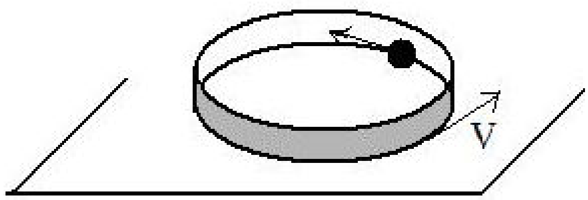


- Inversement, prenons une particule de masse m partant au temps $t = 0$ d'un point A avec $OA = R$, avec un vecteur vitesse initial V perpendiculaire à OA et d'amplitude v. Soumettons-la à une force F dite centripète toujours dirigée vers le point O et d'amplitude constante égale à $m\,v^2\,/\,R$. Grâce à la loi fondamentale de la dynamique $F = m\,A$. Le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle et son amplitude est $v^2\,/\,R$. Puisque les conditions sont exactement identiques au cas précédent, autant au départ qu'à chaque instant, la particule va décrire un cercle de centre O et de rayon R à vitesse constante,

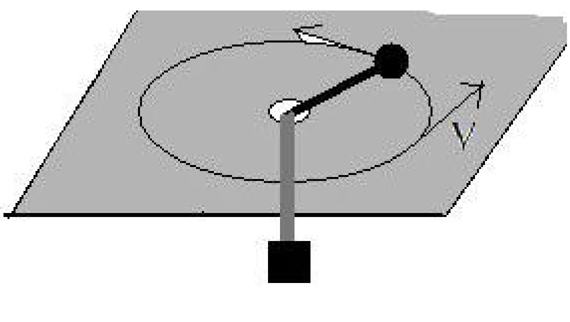
Conditions d'expérience

Donnons deux façons de réaliser ce mouvement circulaire régulier.

1) La boule roule le long d'une bordure circulaire, avec au départ une vitesse tangente à la bordure. La seule force agissante est produite par la réaction de la bordure et elle lui est perpendiculaire. Dans ces conditions, l'amplitude de la vitesse reste constante et comme le mouvement est circulaire, la force vaut $m\,v^2\,/\,R$.

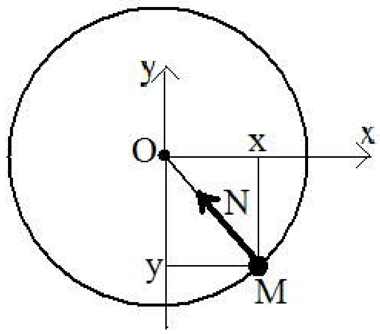


2) La boule de masse m roule sur une surface horizontale en étant attachée à une ficelle. Cette ficelle passe à travers un trou en un point O, et descend verticalement avec en son extrémité un poids P qui lui est accroché. La boule est lancée d'un point A à une distance R de O, avec une vitesse initiale v perpendiculaire à OA. Il suffit de donner au poids P la valeur $m\,v^2\,/\,R$ pour que la boule suive une trajectoire circulaire à vitesse constante.



- *Programme*

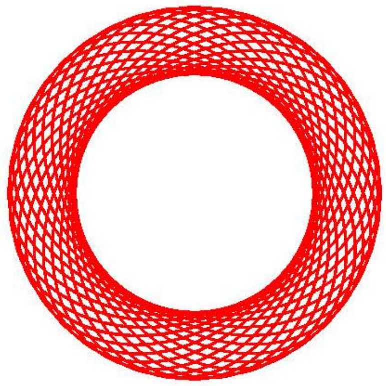
Pour simplifier, on suppose que la masse m est égale à 1. On se donne aussi un rayon r du cercle égal à 1, ainsi qu'une vitesse initiale d'amplitude 1. Comme toujours le programme prend les conditions initiales au temps 0, à savoir la position et le vitesse. Puis on entre dans une boucle où à chaque fois le temps augmente de dt. Dans la boucle l'accélération est calculée, puis la nouvelle position et la nouvelle vitesse, et on recommence. On a besoin du vecteur unitaire N (nx, ny) porté par OM, pour avoir les coordonnées de l'accélération, soit :
$ax = (v^2 / r)\, nx$ et $ay = (v^2 / r)\, ny$.



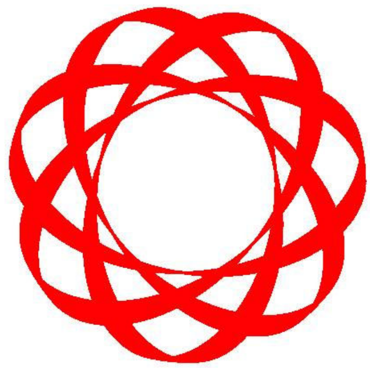

```
v=1.; x=r; y=0.;vx=0.; vy = v ; dt= 0.00001;  /* on a pris r=1. */
for(i=1;i<=10000000;i++)
{
   xe=400+zoom*x; ye=300-zoom*y; cercle( xe,ye,3, rouge);
                          /* dessin du point sous forme de cercle */
   if (i%5000==4999) SDL_Flip(ecran);
   if (i%5000==1) SDL_FillRect(ecran,0,blanc);
        /* pour voir le mouvement avec le cercle suivi d'une traînée */
   om=sqrt(x*x+y*y);  nx=-x/om; ny = -y/om;
   ax=v*v/r*nx ;  ay = v*v/r*ny ;  /* ici  v²/ r vaut 1 */
   x+=vx*dt + 0.5*ax*dt*dt; y+=vy*dt+ 0.5*ay*dt*dt;
   vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
}
```

7- Un exemple plus complexe

Reprenons le dispositif de la deuxième expérience précédente, mais au lieu de prendre un poids égal à $m\, v^2 / R$, qui valait 1 dans le programme ci-dessus, prenons un poids plus grand A. L'accélération est toujours portée par OM sauf que ce vecteur ne reste plus perpendiculaire au vecteur vitesse. Il en découle que l'amplitude de la vitesse ne reste plus constante et que le mouvement n'est plus circulaire. Mais le programme est quasiment inchangé. Comme le vecteur N unitaire désigne plutôt un vecteur normal, c'est-à-dire perpendiculaire au vecteur vitesse, il suffit le changer son nom, en appelant ses coordonnées *MOux* et *MOuy* mais celles-ci sont toujours $- x / om$ et $- y / om$. Le seul véritable changement est dans l'accélération qui s'écrit maintenant $ax = A$**MOux* et $ay = A$**MOuy*. Pour $A = 1$, on avait une trajectoire circulaire. Pour $A = 2$, ainsi que d’autres valeurs supérieures on trouve une forme elliptique tournante ressemblant à une rosace.

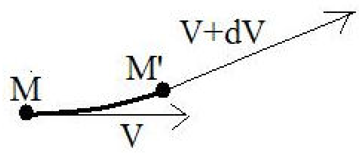


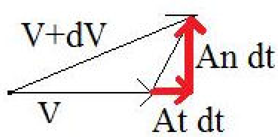
$A = 2$



$A = 3$

8- Accélération tangentielle et accélération normale



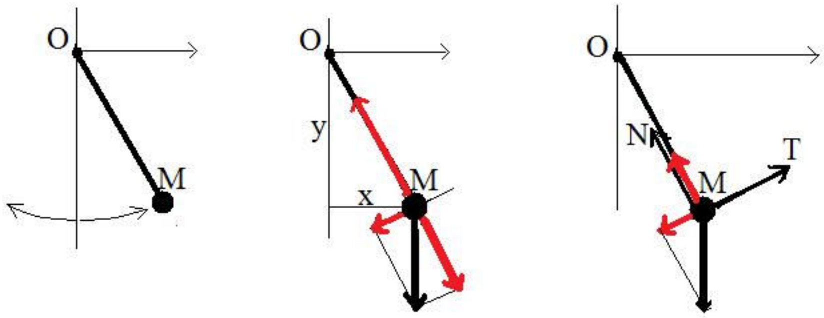


Plaçons-nous maintenant dans le cas le plus général, le point pesant étant en M au temps t, avec une vitesse $\boldsymbol{V}$, et en M' au temps $t + dt$ avec une vitesse $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{dV}$. On a $\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{A}\, dt$ où A est le vecteur accélération, lui-même connu à partir des forces agissantes par $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{A}$. Le vecteur $\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{A}\, dt$ se décompose en deux vecteurs $\boldsymbol{At}\, dt$ et $\boldsymbol{An}\, dt$ portés l’un par la tangente à la trajectoire, l’autre par la perpendiculaire à cette tangente.

Le vecteur tangent $\boldsymbol{At}\, dt$ provoque un allongement (ou un raccourcissement) du vecteur vitesse, tandis que le vecteur $\boldsymbol{An}\, dt$ provoque sa rotation. C’est ce dernier qui crée la courbure de la trajectoire, comme on l’a vu ci-dessus, et il a pour amplitude v^2 / R, où R est le rayon de courbure en M (toute courbe admet en chaque point un rayon de courbure, car elle peut être assimilée autour du point M à un petit arc de cercle). Dans le cas particulier où l’accélération normale est nulle, le mouvement est rectiligne. Dans ce qui suit, nous allons utiliser le vecteur unitaire $\boldsymbol{T}$ tangent à la trajectoire en M, et le vecteur $\boldsymbol{N}$ normal unitaire dirigé vers le centre de courbure. La décomposition des forces sur ces deux vecteurs nous permettront de connaître le mouvement du point M.

9- Mouvement pendulaire

Le pendule est constitué d’une tige rigide de longueur R, suspendue à un point O, et il porte à son autre extrémité un poids P. On prend comme repère Oxy avec Ox horizontal et Oy vertical vers le haut. Lorsque le pendule est lancé à partir de son point bas (x=0, y = -R) avec une vitesse v positive, il se met à osciller sous l’effet de son poids.



A partir du point M, on prend le vecteur $\boldsymbol{T}$ tangent à la trajectoire (voir dessin, sur lequel x est positif et y négatif) et le vecteur $\boldsymbol{N}$ normal, ces deux vecteurs ayant une longueur 1. Avec $\boldsymbol{MO}(-x, -y)$, on a $\boldsymbol{N}(-x / R, -y / R)$, et par suite $\boldsymbol{T}(-y / R, x / R)$. Le poids $P = mg$ se décompose en deux forces, l'une sur $\boldsymbol{N}$, soit $(-mg\, y / R)$ $\boldsymbol{N}$, et l'autre sur $\boldsymbol{T}$, soit $(-mg\, x / R)$ $\boldsymbol{T}$. Mais ce n'est pas la seule force agissante. Il y a aussi la réaction de la tige, qui s'oppose à la composante normale du poids, ce qui annule son effet, avec en plus la force centripète $m\, v^2 / R\, \boldsymbol{N}$ sans laquelle le point M suivrait une trajectoire rectiligne au lieu de sa trajectoire circulaire. On en déduit que l'accélération tangentielle est $(-g\, x / R)$ $\boldsymbol{T}$ et l'accélération normale (v^2 / R) $\boldsymbol{N}$. Le programme en découle.

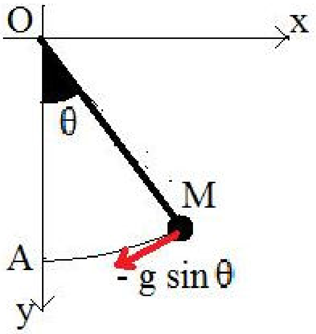
```
dt=0.0000001; x=0.;y=-R; vx=6.5; vy=0.;  /* conditions initiales */
for(i=1;i<=100000000;i++)
  {
    xe=400+zoom*x; ye=300-zoom*y;  cercle( xe,ye,2, rouge);
     if (i%100000==99999) {cercle(400,300,zoom*R,noir);SDL_Flip(ecran);}
     if (i%100000==1)SDL_FillRect(ecran,0,blanc);
    Nx=-x/R; Ny=-y/R;   /* coordonnées du vecteur N */
    Tx=-y/R; Ty=x/R;    /* coordonnées du vecteur T */
    Atx=-g*Ty*Tx; Aty=-g*Ty*Ty;
             /* coordonnées du vecteur acceleration tangentielle */
    v=sqrt(vx*vx+vy*vy);   /* amplitude de la vitesse */
    Anx=(v*v/R)*Nx; Any=(v*v/R)*Ny;
             /* coordonnées du vecteur acceleration normale */
    ax=Atx+Anx; ay=Aty+Any;   /* projection du vecteur acceleration sur les axes */
    x+=vx*dt + 0.5*ax*dt*dt;
    y+=vy*dt+ 0.5*ay*dt*dt;
    vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
  }
```

Remarquons que par cette méthode, le point M suit une trajectoire circulaire à cause seulement de l'accélération normale v^2 / R, sans avoir besoin d'imposer la contrainte à x et y d'obéir à l'équation du cercle. Cette méthode a l'avantage de s'appliquer à n'importe quelle courbe, où il suffit de remplacer le rayon du cercle par le rayon variable de la courbure de la courbe en chaque point, comme on le verra plus tard. Elle a le désavantage, dans le cas du pendule, de ne pas nous donner l'équation différentielle du mouvement sous une forme simple. Pour cela prenons une autre méthode.

Deuxième méthode

Prenons comme repère *Oxy* avec *Ox* horizontal et *Oy* vertical, mais dirigé vers le bas, et introduisons l'angle θ du pendule avec l'axe des y. Cet angle orienté dépend du temps, et nous allons chercher l'équation différentielle qu'il vérifie. Maintenant imposons au point M d'être sur le cercle de centre O et de rayon R, d'où

$x = R \sin \theta$ et $y = R \cos \theta$.



Appelons s l'arc AM (orienté) à l'instant t, en appelant s sa mesure algébrique (positive ou négative selon les cas de figure).. On a $s = R\theta$, d'où la dérivée par rapport au temps $s' = R\theta'$, puis en dérivant encore $s'' = R\theta''$. Dans ces conditions $s' = ds / dt$ n'est autre que la vitesse tangentielle, comme nombre, avec un signe + ou – selon le sens, et s'' est la dérivée de cette vitesse, c'est-à-dire l'accélération tangentielle (comme nombre). Comme on a imposé au point M de rester sur le cercle, seule cette accélération tangentielle intervient, en faisant varier l'amplitude de la vitesse tangentielle. Mais grâce à la loi fondamentale de la dynamique, cette accélération tangentielle est provoquée par la projection du poids sur la tangente ***T*** au cercle, soit $-mg \sin \theta$, et l'on aboutit à l'équation différentielle $m R \theta'' = - mg \sin \theta$, soit [3]

$\theta'' = - \omega^2 \sin \theta$, avec $\omega^2 = g / R$.

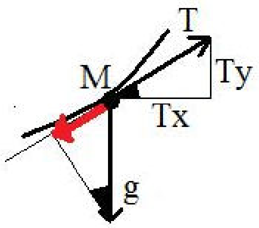
Cette méthode permet d'éviter d'utiliser la force normale, le mouvement sur le cercle étant imposé au départ. On aboutit au programme suivant, en appelant *angle* l'angle θ, avec la vitesse angulaire θ' notée *vangle*, et l'accélération angulaire *aangle*, toutes ces variables ici comme auparavant étant déclarée en *double*.

```
dt= 0.000001; angle=0.; vangle=2.;

for(i=1;i<=100000000;i++)
{   x = R*sin(angle); y = R*cos(angle);
    xe=400+zoom*x; ye=300+zoom*y;  cercle( xe,ye,2, rouge);
     if (i%5000==4999) {cercle(400,300,zoom*R,noir);SDL_Flip(ecran);}
     if (i%10000==1) SDL_FillRect(ecran,0,blanc);

    aangle= - o2* sin(angle);
    angle += vangle*dt;
    vangle+=aangle*dt;
}
```

[3] Pour comprendre concrètement la présence de ce signe -, prenons le cas de la figure où l'arc s est positif (et $\sin \theta > 0$). Si s augmente, s' est positif, mais l'accélération doit être négative ($\theta'' < 0$)pour faire diminuer la vitesse s'. On dit que la force s'oppose au mouvement. On a le même résultat dans tous les cas de figure.

10- Mouvement d'un corps pesant avec une trajectoire imposée

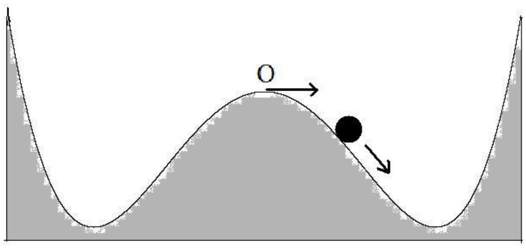
Ce que nous avons fait pour le pendule avec sa trajectoire circulaire, on peut le généraliser à n'importe quelle courbe d'équation $y = f(x)$. A l'instant t, le point pesant M se trouve sur la courbe. Un vecteur tangent à la courbe a pour coordonnées (1, y') puisque la dérivée y' de y par rapport à x est la pente de la tangente en ce point. En divisant par la longueur $LT = \sqrt{1+y'^2}$ de ce vecteur, on obtient le vecteur tangent unitaire T de coordonnées $Tx = 1 / LT$ et $Ty = y' / LT$. Le poids se projette sur la tangente, ce qui donne une accélération tangentielle de mesure $- g\ Ty$. On en déduit l'accélération tangentielle ***At*** de coordonnées



$$Atx = - g\ Ty\ Tx \text{ et } Aty = - g\ Ty\ Ty.$$

Lorsque l'on impose au point M de rester assujetti à la courbe d'équation $y = f(x)$, cette accélération tangentielle suffit pour avoir la variation de la vitesse tangentielle pendant l'intervalle de temps dt, et d'en déduire le mouvement du point M, comme on l'a programmé dans la deuxième méthode utilisée pour le pendule.

Application de cette méthode lorsque le point pesant se trouve sur la courbe d'équation $y = (1 / 4)\ x^4 - 2\ x^2$



On est dans le contexte de ce dessin où la courbe présente deux cuvettes. Le programme suivant permet de visualiser le mouvement de la bille qui est lancée à partir du point O avec une vitesse donnée.

```
tracer la courbe
dt= 0.000001;
x=0.; y=0.; vx=1.; vy=0.; v=1.;  /* conditions initiales */
for(i=0;i<100000000; i++)
{
   dessiner le point M
   yprime=-4.*x+x*x*x;
   LT=sqrt(1.+yprime*yprime);
   Tx=1./LT; Ty=yprime/LT;
   at=-Ty;  /* mesure de l'accélération tangentielle, on a pris g = 1  */
   x+=vx*dt ;    y+=vy*dt ;  /* nouvelle position  */
   v+=at*dt;   vx=v*Tx;   vy=v*Ty;  /* nouvelle mesure de la vitesse tangentielle v,
                                        et coordonnées vx et vy du vecteur vitesse  */
}
```

Autre méthode

On n'impose plus au point M d'avoir ses coordonnées qui vérifient l'équation de la courbe. Mais le point va rester sur la courbe car on utilise maintenant l'accélération normale ***An*** où intervient le rayon de courbure R de la courbe. On utilise pour cela la formule qui donne le rayon de courbure R d'une courbe d'équation $y = f(x)$ en chaque point :

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Le programme est un peu plus complexe que le précédent, mais donne les mêmes résultats.

```
x=0.; y=0.; vx=1.; vy=0.;
for(i=0;i<10000000; i++)
  {
     yprime=-4.*x+x*x*x; yseconde=3.*x*x-4.;
     R=pow(1.+yprime*yprime, 1.5)/yseconde;
     LT=sqrt(1.+yprime*yprime);     Tx=1./LT; Ty=yprime/LT;
     Nx=-Ty; Ny=Tx;
     Atx=-Ty*Tx; Aty=-Ty*Ty;
     v=sqrt(vx*vx+vy*vy);
     centripete=v*v/R; Anx=centripete*Nx; Any=centripete*Ny;
     ax=Atx+Anx; ay = Aty+Any;
     x+=vx*dt + 0.5*ax*dt*dt;
     y+=vy*dt + 0.5*ay*dt*dt;;
     vx+=ax*dt; vy+=ay*dt;
  }
```

Exercice

Faire de même quand la courbe est une parabole d'équation $y = a\, x^2$, avec $a = 1$ par exemple.